المـــــادة : رياضيات

زمن الإجابة : ساعة ونصف

عدد صفحات الأسئلة : (8)

امتحان تجريبي للفصل الدراسي الثالث للصف الثاني عشر / القسم العلمي

للعام الدراسي 2010 / 2011

على الطالب التأكد من عدد صفحات الأسئلة

الإجابة على الورقة نفسها

السؤال الأول

نموذج الإجابة

أولاً :

1) اثبت أن : $F(x) = e^{2x} \ln 3x$

هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{x} + \ln 9x^2\right)$ حيث $x > 0$

$$F(x) = e^{2x} \ln 3x \quad \rightarrow \quad F'(x) = 2e^{2x} \ln 3x + e^{2x}\left(\frac{3}{3x}\right)$$

$$F'(x) = 2e^{2x} \ln 3x + \frac{1}{x} e^{2x}$$

$$= e^{2x}\left(2\ln 3x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= e^{2x}\left(\ln 9x^2 + \frac{1}{x}\right) \quad = f(x)$$

إذا $F(x)$ مشتقة عكسية للدالة $f(x)$ حيث $x > 0$

2) أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(t) = 2 - \sqrt{9 - t^2}$ على الفترة $[-3, 3]$

ثم أوجد قيم c التي تقع في هذه الفترة والتي يكون عندها $f(c)$ تساوي هذه القيمة المتوسطة .

$$av(f) = \frac{1}{3-(-3)} \int_{-3}^{3} \left(2 - \sqrt{9 - t^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{6}\left[2x\right]_{-3}^{3} - \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - t^2}\, dt$$

$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - t^2}\, dt$ يساوي مساحة نصف دائرة طول نصف قطرها 3

$$av(f) = \frac{1}{6}\left[\left(6 - (-6)\right) - \frac{1}{2}(3)^2 \pi\right] \approx -0.4$$

$$f(c) = 2 - \sqrt{9 - c^2} = -0.4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{9 - c^2} = 2.4 \quad \rightarrow \quad 9 - c^2 = 5.76$$

$c^2 = 3.24 \quad \rightarrow \quad c = \pm 1.8$ وكلاهما يقعان في الفترة

3) بإستخدام خواص التكامل المحدد بين أن : $1 \leq \int_0^1 3x^2 \sqrt{1+x^2}\, dx \leq \sqrt{2}$

بالتربيع $0 \leq x \leq 1 \rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$

بإضافة 1 $1 \leq x^2+1 \leq 2$

بأخذ الجذر التربيعي $1 \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}$

بالضرب في $3x^2$ حيث $3x^2 \geq 0$ $\quad 3x^2 \leq 3x^2\sqrt{x^2+1} \leq 3x^2\sqrt{2}$

بأخذ التكامل المحدد $3\int_0^1 x^2\, dx \leq \int_0^1 3x^2\sqrt{x^2+1}\, dx \leq 3\sqrt{2}\int_0^1 x^2\, dx$

$$\left[\frac{3x^2}{3}\right]_0^1 \leq \int_0^1 3x^2\sqrt{x^2+1}\, dx \leq 3\sqrt{2}\left[\frac{x^2}{3}\right]_0^1$$

$$1 \leq \int_0^1 3x^2\sqrt{x^2+1}\, dx \leq \sqrt{2}$$

ثانياً :

أوجد ما يلي :

4) $\int \frac{4}{x}\sqrt[3]{5x^3-x^4}\, dx = \int \frac{4}{x}\sqrt[3]{x^3(5-x)}\, dx$

$$= \int \frac{4}{x}\, x\sqrt[3]{5-x}\, dx$$

$$= 4\int (5-x)^{\frac{1}{3}}\, dx$$

$$= -4 \times \frac{3}{4}(5-x)^{\frac{4}{3}} + c = -3(5-x)^{\frac{4}{3}} + c$$

5) $\int \frac{1}{e^{-x}+1}\, dx = \int \frac{e^x(1)}{e^x(e^{-x}+1)}\, dx$

$$= \int \frac{e^x}{(e^x+1)}\, dx$$

$$= \ln|e^x+1| + c$$

6) $\int (\sin x - \csc^2 x)\, dx = -\cos x + \cot x + c$

7) إذا كان $f(x)$ دالة متصلة بحيث أن : $\int_6^{3x} f(x)\ dx = 4x^2 + bx - 5$

أوجد قيمة b

بوضع $x = 2$

$$\int_6^6 f(x)\ dx = 0 \quad \rightarrow \quad (4x^2 + bx - 5)_{x=2} = 0$$

$$(4(2)^2 + 2b - 5) = 0$$

$$2b = -11$$

$$b = -5.5$$

8) أوجد معادلة الدالة $y = f(x)$ حيث $\frac{d^2y}{dx^2} = 6$ والمماس المرسوم لمنحنى الدالة $f(x)$ عند $(0, 1)$ أفقياً .

$\because$ المماس المرسوم لمنحنى الدالة $f(x)$ عند $(0, 1)$ أفقياً $\leftarrow$ $\therefore\ y'(0) = 0$, $y(0) = 1$

$$\int \frac{d^2y}{dx^2}\ dx = \int 6x\ dx \quad \rightarrow \quad y' = 3x^2 + c$$

$$y'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0 + c \quad \rightarrow \quad c = 0$$

$$y' = 3x^2$$

$$\int y'\ dx = \int 3x^2\ dx$$

$$y = x^3 + c$$

$$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = 0 + c \quad \rightarrow \quad c = 1$$

$$y = x^3 + 1$$

السؤال الثاني

أولاً :

10) إذا كان $\int_a^x f(t)dt + k = \int_b^x f(t)dt$ أوجد قيمة k حيث :

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x} \quad , a = 2 \ , b = 4$$

$$\int_a^x f(t)\ dt - \int_b^x f(t)\ dt = -k$$

$$\int_a^x f(t)\ dt + \int_x^b f(t)\ dt = -k \quad \rightarrow \quad \int_a^b f(t)\ dt = -k$$

$$\int_2^4 \frac{1}{xlnx}\ dx = \int_2^4 \frac{\frac{1}{x}}{lnx}\ dx = [ln\,|ln\,x|]_2^4 = ln\,|ln4| - ln\,|ln2|$$

$$= 0.33 + 0.37 = 0.7$$

$$k = -0.7$$

11) لتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[1\,,5]$ وكان :

$$\int_2^5 f(x)dx = 6 \qquad \int_3^2 f(x)dx = -4 \qquad \int_1^3 f(x)dx = 4$$

لأي تجزيء p على الفترة $[1\,,5]$ أوجد قيمة : $\lim\limits_{\|p\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} (f(c_k) - 2c_k)\Delta x_k$

$$\lim_{\|p\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (f(c_k) - 2c_k)\Delta x_k = \int_1^5 (f(x) - 2x)\ dx$$

$$= \int_1^5 f(x)\ dx - 2\int_1^5 x\ dx = \int_1^3 f(x)\ dx + \int_3^2 f(x)\ dx + \int_2^5 f(x)dx - [x^2]_1^5$$

$$= 4 - 4 + 6 - 25 + 1 = -18$$

12) أوجد طول قوس المنحنى $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}$ على الفترة $[1\,,4]$

$$y' = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad (y')^2 = x$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{x+1}\ dx = \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{2}{3}\,(4+1)^{\frac{3}{2}} - (1+1)^{\frac{3}{2}} = 8.4$$ وحدة طول

ثانياً :

13) باستخدام التكامل بالتجزئ أوجد : $\int x^5 \ln 3x \;dx$

$dv = x^5 \,dx$ $\qquad\qquad$ $u = \ln 3x$

$v = \frac{1}{6}x^6 \,dx$ $\qquad\qquad$ $du = \frac{3}{3x}$

$$\int x^5 \ln 3x \;dx = \frac{1}{6}x^6 \;\ln 3x - \frac{1}{6}\int x^6\left(\frac{1}{x}\right)\;dx$$

$$= \frac{1}{6}x^6 \;\ln 3x - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)x^6 + c$$

$$= \frac{1}{6}x^6 \;\ln 3x - \frac{1}{36}x^6 + c$$

14) باستخدام الكسور الجزئية أوجد : $\int \frac{x+1}{(x-3)(x+2\,)} \;\; dx$

$$\frac{x+1}{(x-3)(x+2\,)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2\,)} \quad\rightarrow\quad (\,x+1\,) = A\,(\,x+2\,) + B\,(\,x-3\,)$$

$A = \frac{4}{5}$ $\quad \leftarrow \quad x = 3$ بوضع

$B = \frac{1}{5}$ $\quad \leftarrow \quad x = -2$ بوضع

$$\int \frac{x+1}{(x-3)(x+2\,)}\;dx = \frac{4}{5}\int \frac{1}{(x-3)}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{(x+2)}dx$$

$$= \frac{4}{5}\;\ln|x-3| + \frac{1}{5}\;\ln|x+2| + c$$

15) باستخدام التكامل بالتعويض أوجد قيمة : $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \;\; dx$

$dx = \frac{du}{2x} \;\leftarrow\; du = 2x\,dx \;\leftarrow\; u = x^2+1$: بفرض أن

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\;dx = \int \frac{2x}{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{du}{2x} = \int u^{\frac{-1}{2}}\,du$$

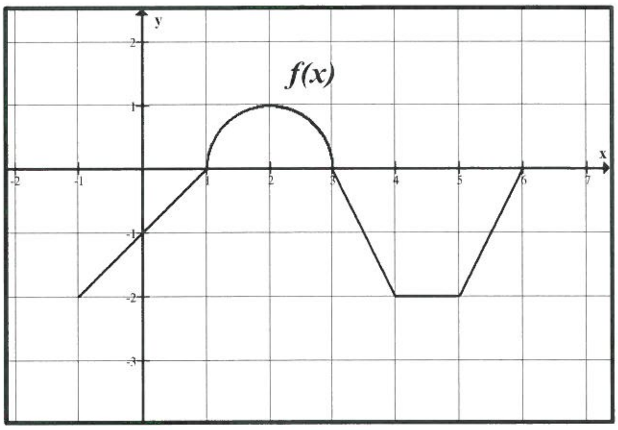
$$= 2u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{x^2+1} + c$$

السؤال الثالث

أولاً : الشكل التالي يمثل بيان الدالة f المتصلة على مجالها .

بفرض أن : $H(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\ dt$



أوجد قيمة كل من :

16) $H'(2) = f(2) = 1$

17) $H''(2) = f'(2) = 0$

18) $H(2) = \int_{-1}^{2} f(t)\ dt$

$= -\frac{1}{2}(2)(2) + \frac{1}{4}\pi(1)^2$

$= \frac{\pi}{4} - 2$

19) إشارة $H(6)$ إشارة $H(6)$ سالبة لأن : $H(6) = \int_{-1}^{6} f(t)\ dt$

20) تحصل $H(x)$ على قيمتها العظمى عند $x = 3$

21) القيمة الصغرى للدالة $H(x)$ هي $H(6) = \int_{-1}^{6} f(t)\ dt$

$= -\frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2}\pi(1) - \frac{1}{2}(3+1) \times 2$

$= -2 + \frac{1}{2}\pi - 4 = \frac{\pi}{2} - 6$

22) بين أن : $7 \le \int_{-1}^{6} \sqrt{f(x)+3}\ dx \le 14$

$-2 \le f(x) \le 1$

$-2+3 \le f(x)+3 \le 1+3$

$1 \le f(x)+3 \le 4$

$\sqrt{1} \le \sqrt{f(x)+3} \le \sqrt{4}$

$\int_{-1}^{6} 1dx \le \int_{-1}^{6} \sqrt{f(x)+3}\ dx \le \int_{-1}^{6} 2\, dx$

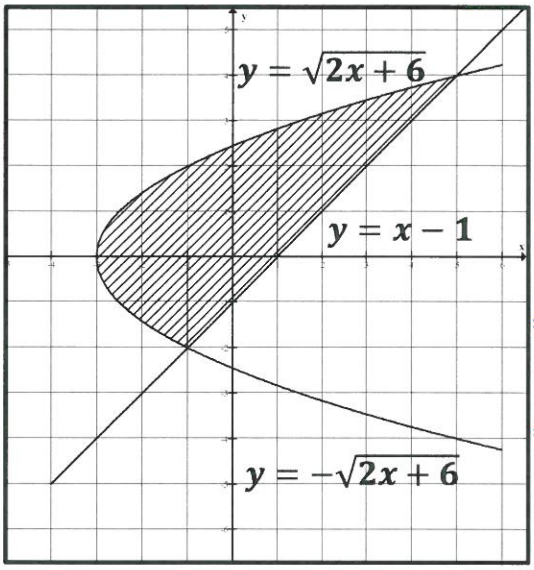
$7 \le \int_{-1}^{6} \sqrt{f(x)+3}\ dx \le 14$

23) أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة [6 , 1-] .

$av\ f(x) = \frac{1}{6-(-1)} \int_{-1}^{6} f(x)\, dx = \frac{1}{7} \times (-4.4) \approx -0.63$

ثانياً :

24) أوجد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المستقيم $y = x - 1$ والمنحنيين : $y = \sqrt{2x+6}$, $y = -\sqrt{2x+6}$



$$A = \int_{-3}^{-1}\left(\sqrt{2x+6} - \left(-\sqrt{2x+6}\,\right)\right) dx + \int_{-1}^{5}\left(\sqrt{2x+6} - (x-1)\right)dx$$

$$A = 2\int_{-3}^{-1}\sqrt{2x+6}\; dx + \int_{-1}^{5}\left(\sqrt{2x+6} - x + 1\right) dx$$

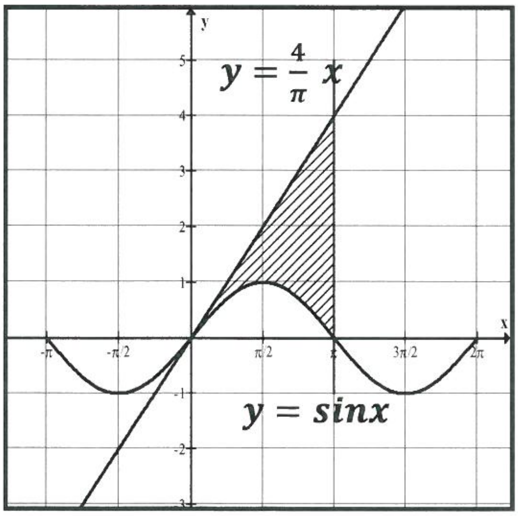
$$= \frac{2}{3}\left[(2x+6)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left[(2x+6)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{5} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{5}$$

$$= \frac{2}{3}\left[(-2+6)^{\frac{3}{2}} - (-6+6)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{1}{3}\left[(10+6)^{\frac{3}{2}} - 8\right] + \left[\left(-\frac{25}{2} + 5\right) + \frac{1}{2} + 1\right]$$

$$= \frac{2}{3}\times 8 + \frac{1}{3}(64 - 8) - 7.5 + (1.5) \approx 18$$ وحدة مساحة

25) أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المستقيم $y = \frac{4}{\pi}x$ والمنحنى $y = sinx$

حيث $0 \le x \le \pi$ دورة كاملة حول محور السينات.



$$V = \pi\int_{0}^{\pi}\left(\left(\frac{4}{\pi}x\right)^2 - (sinx)^2\right)dx$$

$$= \pi\int_{0}^{\pi}\left(\frac{16}{\pi^2}x^2 - \frac{1}{2}(1 - cos\,2x)\right)dx$$

$$= \pi\left[\frac{16}{3\pi^2}\times x^3 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}sin\,2x\right)\right]_0^{\pi}$$

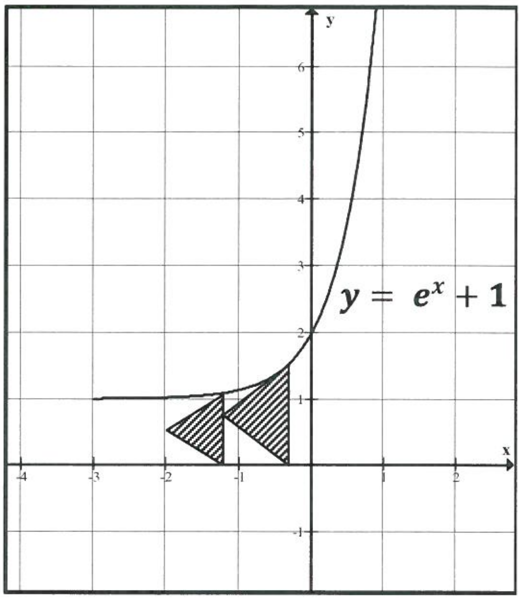
$$= \pi\left(\frac{16}{3\pi^2}\times\pi^3 - \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}sin\,2\pi\right) - 0\right)$$

$$V = \pi\left(\frac{16\pi}{3} - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{29}{6}\,\pi^2$$ وحدة حجم

26) أوجد حجم المجسم الذي يقع بين مستويين عموديين على المحور السيني عند $x = 0$ ، $x = -2$

والمقاطع العرضية العمودية على المحور السيني في الفترة $[-2, 0]$ هي مثلثات متطابقة الأضلاع ويقع أحد ضلعيه

بين المنحنى $y = e^x + 1$ ومحور السينات



$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{-2}^{0} (e^x + 1)^2 \, dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{-2}^{0} (e^{2x} + 2e^x + 1) \, dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x + x\right]_{-2}^{0}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\left(\frac{1}{2} e^0 + 2e^0 + 0\right) - \left(\frac{1}{2} e^{-4} + 2e^{-2} - 2\right)\right]$$

≈ 1.8 وحدة حجم

انتهت الأسئلة مع تمنياتنا لكم بالنجاح والتوفيق